

# Thermal nature of the causal diamond horizon

*Phys. Rev. D 112, 125008*

Gustavo Valdivia-Mera

Department of Physics and Texas Center for Superconductivity,  
University of Houston, Houston, TX 77204, USA

TINKUY 2026 - 3 de marzo de 2026

# Estructura de la charla

Introducción

Geometría del diamante causal

Transformación Rindler  $\rightarrow$  Diamante

El método

Análisis near-horizon

Resultados: Diamante causal

Complemento: Rindler

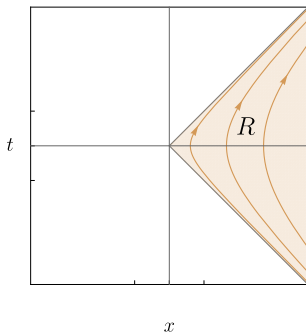
Conclusiones

## Motivación: Efecto Unruh

- ▶ Observador uniformemente acelerado ( $a$ ) en Minkowski
- ▶ Su trayectoria se confina al wedge derecho  $R$
- ▶ Detecta un baño térmico con temperatura:

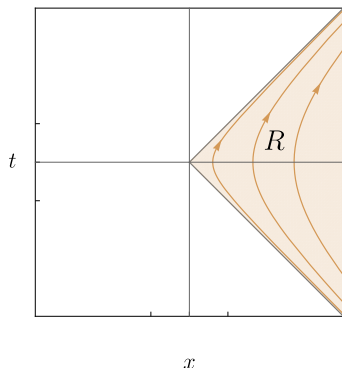
$$T = \frac{a}{2\pi}$$

- ▶ Los horizontes de Rindler ( $t = \pm x$ ) son fundamentales



Wedge de Rindler  $R$  con horizontes  $t = \pm x$

¿La termalidad requiere aceleración...



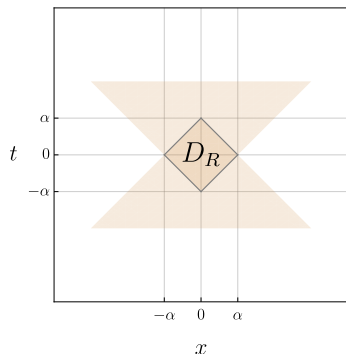
...o es una propiedad más general de los horizontes causales?

# Objetivo

**Desarrollar un método causalmente consistente** que revele la termalidad del vacío de Minkowski para un observador con vida finita  $2\alpha$ :

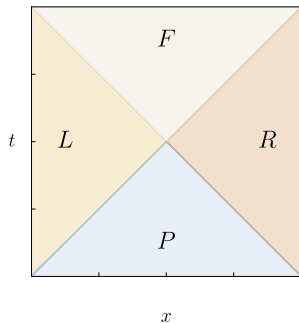
## Diamante causal $D_R$

- ▶  $D_R := \{(t, x) : |t| + |x| \leq \alpha\}$
- ▶ Dominio causal de un observador con vida finita
- ▶ Nacimiento:  $(-\alpha, 0)$
- ▶ Muerte:  $(\alpha, 0)$
- ▶ La frontera contiene horizontes causales

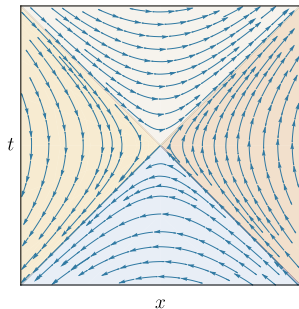


Diamante causal  $D_R$  con horizontes

## Los wedges de Rindler y su flujo Killing



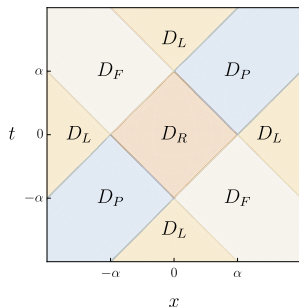
Wedges:  $R, L, P, F$



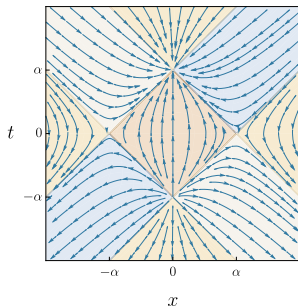
Flujo de  $\partial_\eta$  (Killing)

- ▶  $\partial_\eta$  es timelike en  $R$  y  $L$ , spacelike en  $P$  y  $F$ , null en horizontes
- ▶ Los wedges  $P$  y  $F$  serán cruciales para propagaciones a través de horizontes

## Los diamantes causales y su flujo Killing conforme



Diamantes:  $D_R, D_L, D_P, D_F$



Flujo de  $\partial_\eta$  (Killing conforme)

- ▶ Cada diamante es la imagen del wedge correspondiente bajo transformación conforme
- ▶  $D_R$ : nuestro espacio de interés (observador con vida finita)
- ▶  $D_P$  y  $D_F$ : regiones "más allá" de los horizontes pasado y futuro

## Coordenadas de Rindler

Coordenadas de Rindler  $(\eta, \rho)$  para los diferentes wedges:

**Wedge R:**

$$t_r = \rho \sinh(a\eta)$$

$$x_r = \rho \cosh(a\eta)$$

**Wedge P:**

$$t_p = -\rho \cosh(a\eta)$$

$$x_p = -\rho \sinh(a\eta)$$

**Wedge F:**

$$t_f = \rho \cosh(a\eta)$$

$$x_f = \rho \sinh(a\eta)$$

$$\text{con } a = \frac{2}{\alpha}$$

Notar que en  $P$  y  $F$  la coordenada  $\eta$  es espacial.

## Transformación conforme: Rindler $\rightarrow$ Diamante

### Composición conforme

$$x^\mu = [T \circ K \circ D] \tilde{x}^\mu$$

donde  $\tilde{x}^\mu = (t_r, x_r)$  son coordenadas de Minkowski en el wedge  $R$ .

### Componentes del grupo conforme:

Dilatación:  $D(\lambda)\tilde{x}^\mu = \lambda \tilde{x}^\mu$

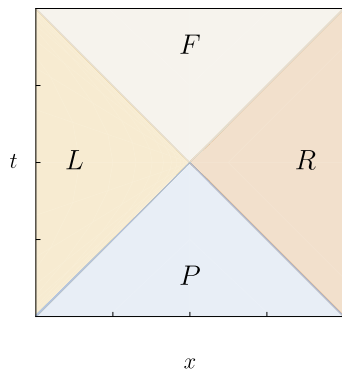
Traslación:  $T(c)\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu + c^\mu$

$$\text{SCT: } K(b)\tilde{x}^\mu = \frac{\tilde{x}^\mu - b^\mu(\tilde{x} \cdot \tilde{x})}{1 - 2(b \cdot \tilde{x}) + (b \cdot b)(\tilde{x} \cdot \tilde{x})}$$

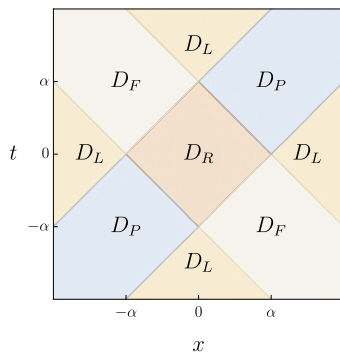
### Parámetros fijos:

$$b^\mu \equiv \left(0, -\frac{1}{2\alpha}\right) \quad , \quad c^\mu \equiv (0, -\alpha)$$

## Visualización: Wedges de Rindler y Diamantes Causales



**Wedges de Rindler**  
 $R, L, P, F$



**Diamantes Causales**  
 $D_R, D_L, D_P, D_F$

**La transformación conforme mapea cada wedge en su diamante correspondiente**

## Coordenadas del diamante causal (resultado)

Aplicando la transformación conforme obtenemos:

Coordenadas  $(t_{d_r}, x_{d_r})$  en términos de  $(\eta, \rho)$

$$t_{d_r} = \frac{4\alpha^2 \rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)}{\alpha^2 + 4\alpha\rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) + 4\rho^2}$$
$$x_{d_r} = \frac{4\alpha\rho^2 - \alpha^3}{\alpha^2 + 4\alpha\rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) + 4\rho^2}$$

**Métrica resultante:**

$$ds^2 = \Lambda^2(\eta, \rho) \left[ -\frac{4\rho^2}{\alpha^2} d\eta^2 + d\rho^2 \right]$$

con factor conforme:

$$\Lambda^2(\eta, \rho) = \frac{16\alpha^4}{\left(\alpha^2 + 4\alpha\rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) + 4\rho^2\right)^2}$$

## Coordenadas para $D_P$ y $D_F$

Para analizar propagaciones a través de horizontes, necesitamos las coordenadas en los diamantes pasado y futuro:

**Diamante  $D_P$ :**

$$t_{d_p} = \frac{-4\alpha^2 \rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)}{\alpha^2 - 4\alpha\rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) - 4\rho^2}$$

$$x_{d_p} = \frac{-4\alpha\rho^2 - \alpha^3}{\alpha^2 - 4\alpha\rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) - 4\rho^2}$$

**Diamante  $D_F$ :**

$$t_{d_f} = \frac{4\alpha^2 \rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)}{\alpha^2 + 4\alpha\rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) - 4\rho^2}$$

$$x_{d_f} = \frac{-4\alpha\rho^2 - \alpha^3}{\alpha^2 + 4\alpha\rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right) - 4\rho^2}$$

Notar que en  $D_P$  y  $D_F$  la coordenada  $\eta$  es espacial.

## Descripción del método - Parte 1

### 1. Cálculo de $G_F$ entre eventos:

- ▶ Dentro de  $D_R$  (control)
- ▶ Cruzando horizontes:  $D_P \rightarrow D_R$  y  $D_R \rightarrow D_F$

Usamos la representación de Schwinger del propagador de Feynman:

### Propagador de Feynman

$$G_F(x-y) = i \left( \frac{1}{4\pi i} \right)^{d/2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{d/2}} \exp \left[ \frac{i}{4s} \sigma^2(x,y) - ism^2 - s\epsilon \right]$$

### 2. Transformada de Fourier en $\Delta\eta$ :

$$\tilde{G}_F(\Omega) = \int d(\Delta\eta) G_F(\Delta\eta) e^{-i\Omega\Delta\eta}$$

- ▶  $\Omega > 0$ : modos positivos  $\rightarrow$  propagación hacia el futuro

### 3. Configuración triádica:

Establecemos tres eventos relacionados causalmente:

- ▶  $x^\mu$ : evento común (en  $D_R$ )
- ▶  $y^\mu$ : evento en el pasado de  $x^\mu$  (en  $D_P$ )
- ▶  $\bar{y}^\mu$ : evento en el futuro de  $x^\mu$  (en  $D_F$ )

Con la relación de reflexión temporal:

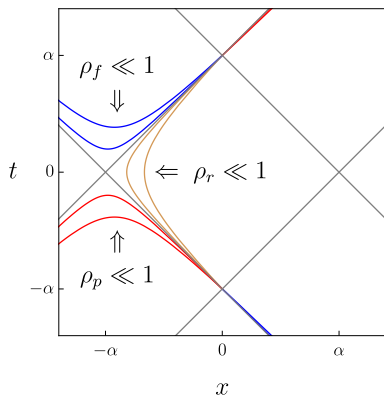
$$\bar{y}^\mu = (-y^0, y^1)$$

### 4. Cálculo del ratio:

$$\mathcal{R}(\Omega) = \left| \frac{\tilde{G}_F^{\text{Path 1 (emisión)}}}{\tilde{G}_F^{\text{Path 2 (absorción)}}} \right|^2$$

- ▶ Path 1:  $D_P \rightarrow D_R$  (emisión desde horizonte pasado)
- ▶ Path 2:  $D_R \rightarrow D_F$  (absorción en horizonte futuro)

## Análisis near-horizon: $\rho \ll 1$



Trayectorias  $\rho \ll 1$  (cerca del horizonte izquierdo)

Expansión para  $\rho \ll 1$ :

$$t_{dr} \approx 4\rho \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)$$

$$x_{dr} \approx -\alpha + 4\rho \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)$$

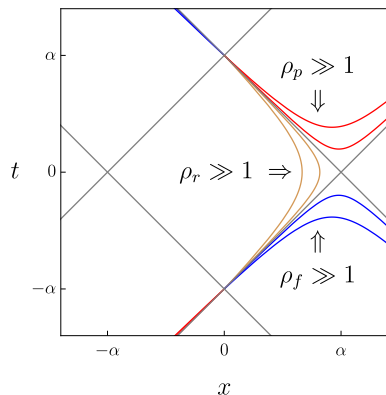
Límites  $\eta \rightarrow \pm\infty$ :

$$\mathcal{H}_0^+ : t = x + \alpha$$

$$\mathcal{H}_0^- : t = -x - \alpha$$

con  $-\alpha < x < 0$

## Análisis near-horizon: $\rho \gg 1$



Trayectorias  $\rho \gg 1$  (cerca del horizonte derecho)

Expansión para  $\rho \gg 1$  (con  $4\tilde{\rho} = \alpha^2/\rho$ ):

$$t_{dr} \approx 4\tilde{\rho} \sinh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)$$

$$x_{dr} \approx \alpha - 4\tilde{\rho} \cosh\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)$$

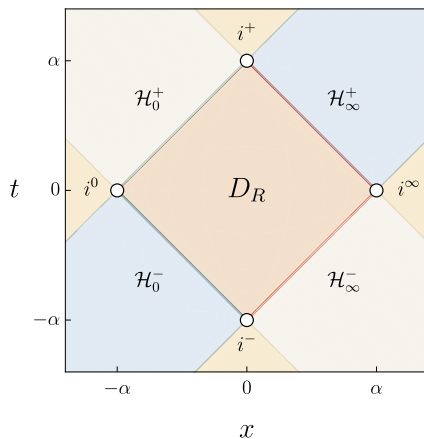
Límites  $\eta \rightarrow \pm\infty$ :

$$\mathcal{H}_{\infty}^+ : t = -x + \alpha$$

$$\mathcal{H}_{\infty}^- : t = x - \alpha$$

con  $0 < x < \alpha$

## Estructura completa de la frontera



**Horizontes izquierdos:**

$$\mathcal{H}_0^+ : t = x + \alpha$$

$$\mathcal{H}_0^- : t = -x - \alpha$$

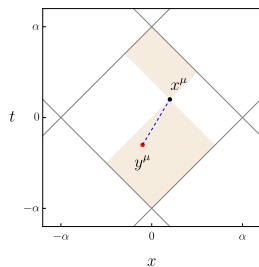
**Horizontes derechos:**

$$\mathcal{H}_\infty^+ : t = -x + \alpha$$

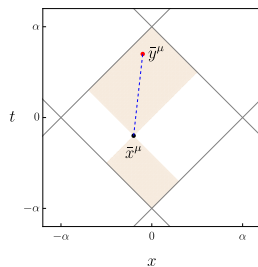
$$\mathcal{H}_\infty^- : t = x - \alpha$$

Puntos asintóticos:  $i^0 : (0, -\alpha)$ ,  $i^\infty : (0, \alpha)$ ,  $i^- : (-\alpha, 0)$ ,  $i^+ : (\alpha, 0)$

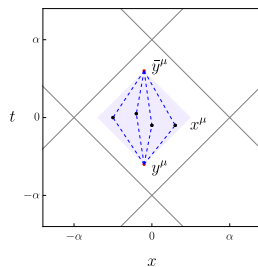
## Propagaciones dentro de $D_R$ (control) - Configuración



**Path 1:**  $y \rightarrow x$   
(ambos en  $D_R$ )



**Path 2:**  $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$   
(ambos en  $D_R$ )



**Configuración:**  
 $x = \bar{x}, \bar{y} = (-y^0, y^1)$

## Propagaciones dentro de $D_R$ (control) - Ecuaciones

Aproximación near-horizon ( $\rho \ll 1$  o  $\rho \gg 1$ ):

Path 1:  $y \rightarrow x$

$$\sigma^2(x, y) \approx 16\rho_x^2 + 16\rho_y^2 - 32\rho_x\rho_y \cosh \left[ \frac{2(\eta_x - \eta_y)}{\alpha} \right]$$

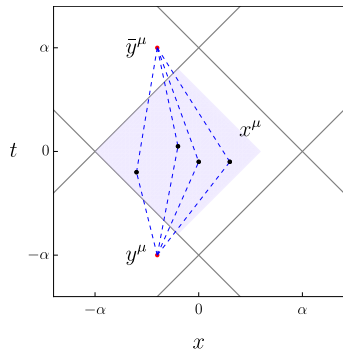
Path 2:  $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$  (con  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = (-y^0, y^1)$ )

$$\sigma^2(x, \bar{y}) \approx 16\rho_x^2 + 16\rho_y^2 - 32\rho_x\rho_y \cosh \left[ \frac{2(\eta_x + \eta_y)}{\alpha} \right]$$

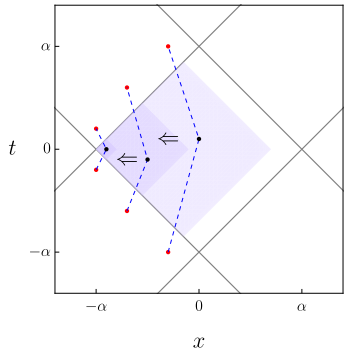
$$\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega) = \tilde{G}_F^{\text{Path 2}}(\Omega)$$

Propagaciones dentro de  $D_R$  son equivalentes (comportamiento inercial).

## Propagaciones a través de horizontes - Configuración



**Path 1:**  $D_P \rightarrow D_R$   
(emisión desde  $\mathcal{H}_0^-$ )



**Path 2:**  $D_R \rightarrow D_F$   
(absorción en  $\mathcal{H}_0^+$ )

## Propagaciones a través de horizontes - Ecuaciones

Aproximación near-horizon:

Path 1:  $D_P \rightarrow D_R$

$$\sigma^2 \approx -32\rho_p\rho_r \sinh \left[ \frac{2(\eta_r - \eta_p)}{\alpha} \right]$$

Atraviesa  $\mathcal{H}_0^-$

Path 2:  $D_R \rightarrow D_F$

$$\sigma^2 \approx 32\rho_p\rho_r \sinh \left[ \frac{2(\eta_r + \eta_p)}{\alpha} \right]$$

Atraviesa  $\mathcal{H}_0^+$

**Observación crucial:** La simetría  $\Delta\eta \rightarrow -\Delta\eta$  se pierde  
Esto señala la termalidad.

## Cálculo de $\tilde{G}_F$ - Path 1 ( $D_P \rightarrow D_R$ )

$$\begin{aligned}\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_r G_F^{\text{Path 1}}(\eta_r - \eta_p) e^{-i\Omega\eta_r} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{4\pi s} e^{-ism^2 - s\epsilon} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\eta) e^{-\frac{8i}{s}\rho_p\rho_r \sinh\left[\frac{2\Delta\eta}{\alpha}\right]} e^{-i\Omega\Delta\eta} e^{-i\Omega\eta_p}\end{aligned}$$

Usando identidad (Gradshteyn & Ryzhik 8.432):

$$2e^{-\text{sign}(\zeta)\pi\nu/2} K_{i\nu}(2\zeta) = \int_0^{\infty} \exp\left[i\zeta(\gamma - \gamma^{-1})\right] \gamma^{i\nu-1} d\gamma$$

Resultado:

$$\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega) = \int_0^{\infty} \frac{ds}{4\pi s} e^{-ism^2 - s\epsilon} \left[ \alpha e^{-i\Omega\eta_p} e^{-\frac{\pi\Omega\alpha}{4}} K_{-i\Omega\alpha/2} \left( -\frac{8\rho_p\rho_r}{s} \right) \right]$$

## Cálculo de $\tilde{G}_F$ - Path 2 ( $D_R \rightarrow D_F$ )

Análogamente:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_F^{\text{Path 2}}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_r G_F^{\text{Path 2}}(\eta_r + \eta_p) e^{-i\Omega\eta_r} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{4\pi s} e^{-ism^2 - s\epsilon} \times \\ &\quad \times \left[ \alpha e^{i\Omega\eta_p} e^{\frac{\pi\Omega\alpha}{4}} K_{i\Omega\alpha/2} \left( -\frac{8\rho_p\rho_r}{s} \right) \right]\end{aligned}$$

**Relación fundamental:**

$$\tilde{G}_F^{\text{Path 2}}(\Omega) = \tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(-\Omega)$$

Y de la expresión para Path 1:

$$\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(-\Omega) = e^{\pi\Omega\alpha/2} \tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega)$$

## ¡Factor de Boltzmann!

Combinando las relaciones:

$$\tilde{G}_F^{\text{Path 2}}(\Omega) = e^{\pi\Omega\alpha/2} \tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega)$$

Por lo tanto:

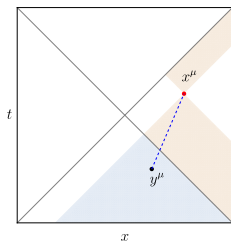
$$\left| \frac{\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}(\Omega)}{\tilde{G}_F^{\text{Path 2}}(\Omega)} \right|^2 = e^{-\beta\Omega}, \quad \beta = \pi\alpha$$

**Temperatura del diamante causal:**  $T = \frac{1}{\pi\alpha}$

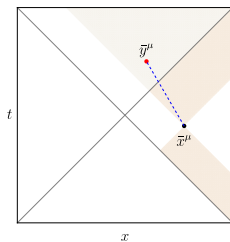
### Interpretación física

- ▶ **Path 1** ( $D_P \rightarrow D_R$ ): Emisión de cuantos desde el horizonte pasado  $\mathcal{H}_0^-$
- ▶ **Path 2** ( $D_R \rightarrow D_F$ ): Absorción en el horizonte futuro  $\mathcal{H}_0^+$
- ▶ El ratio emisión/absorción sigue una distribución térmica

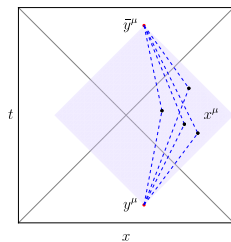
## El caso Rindler - Configuración



**Path 1:**  $P \rightarrow R$



**Path 2:**  $R \rightarrow F$



**Configuración:**  
 $x = \bar{x}, \bar{y} = (-y^0, y^1)$

## El caso Rindler - Ecuaciones y resultado

Usando coordenadas de Rindler ( $a = 2/\alpha$ ):

Path 1:  $P \rightarrow R$

Path 2:  $R \rightarrow F$

$$\sigma^2 = -\rho_p^2 + \rho_r^2 - 2\rho_p\rho_r \sinh[a(\eta_r - \eta_p)] \quad \sigma^2 = -\rho_p^2 + \rho_r^2 + 2\rho_p\rho_r \sinh[a(\eta_r + \eta_p)]$$

El mismo método produce:

$$\left| \frac{\tilde{G}_F^{\text{Path 1}}}{\tilde{G}_F^{\text{Path 2}}} \right|^2 = e^{-\beta\Omega}, \quad \beta = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{Temperatura de Unruh: } T = \frac{a}{2\pi}$$

## Conclusiones

1. Desarrollamos un método **causalmente consistente** que extrae propiedades térmicas del propagador inercial de Feynman.
2. La transformación conforme Rindler  $\rightarrow$  diamante causal permite definir coordenadas y entender la estructura de horizontes.
3. Para el diamante causal de longitud  $2\alpha$ , obtenemos:

$$T = \frac{1}{\pi\alpha}$$

4. Para el wedge de Rindler, recuperamos la temperatura de Unruh:

$$T = \frac{a}{2\pi}$$

5. **Conclusión fundamental:** La termalidad emerge de la **estructura causal**, no requiere aceleración ni gravedad. Los diamantes causales codifican comportamiento termodinámico intrínseco.

# Agradecimientos

- ▶ Army Research Office (ARO) bajo Grant No. W911NF-23-1-0202
- ▶ Center for Mexican American and Latino/a Studies, University of Houston (Lydia Mendoza Fellowship)
- ▶ Organizadores de TINKUY 2026

¿Preguntas?

[gvaldiviamera@uh.edu](mailto:gvaldiviamera@uh.edu)

# Referencias I

-  A. Chakraborty, H.E. Camblong, C.R. Ordóñez, *Phys. Rev. D* 106, 045027 (2022)
-  H.E. Camblong et al., *Phys. Rev. D* 109, 105003 (2024)
-  A. Chakraborty, C.R. Ordóñez, G. Valdivia-Mera, *Class. Quantum Grav.* 42, 025015 (2024)
-  P. Martinetti, C. Rovelli, *Class. Quantum Grav.* 20, 4919 (2003)
-  I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2014)